שאלה 6 מתוך קיץ 2015 (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. נתון כי הפונקציה g(x) מקיימת: g'(x)=f(x).
(g'(x) ו- g(x) מוגדרות באותו תחום).
העבירו משיקים לגרף הפונקציה g(x) המקבילים לציר ה-x.
מה הם שיעורי ה-x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.

פתרון: **א.** $x\neq 0$ **ב.** $x=0\,,\,y=-1$ **ג.** $(-1,0)\,,(3,0)$ **ד.** $\left(-3,-\frac{4}{3}\right)\min$

ה.סקיצה **ו.** $x=3,x=-1$

פתרון מלא:

סעיף א'(1)

מציאת תחום הגדרה

$$\text{מכנה}\neq 0 \rightarrow x^2\neq 0 \xrightarrow{\surd} \boxed{x\neq 0}$$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'

מציאת אסימפטוטות

למציאת אסימפטוטות אנכיות נשווה את המכנה לאפס:

$$\text{מכנה}=0 \rightarrow x^2=0 \xrightarrow{\surd} \boxed{x=0}$$

(נוודא כי x=0 לא מאפס את המונה)

למציאת אסימפטוטות אופקיות נחלק את המקדמים של החזקה הגבוהה:

$$y=\frac{\boxed{-1}\cdot x^{\boxed{2}}+2x+3}{\boxed{1}\cdot x^{\boxed{2}}} \rightarrow \text{החזקה במונה שווה לחזקה במכנה} \rightarrow \text{נחלק את המקדמים} \rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{1}=-1}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

מציאת נקודות חיתוך עם הצירים

מציאת נקודות חיתוך עם ציר y (נציב x=0) -

לא בתחום ההגדרה

מציאת נקודות חיתוך עם ציר x (נציב y=0)

$$y=0:\quad \frac{-x^2+2x+3}{x^2}=0 \xrightarrow{\cdot x^2} -x^2+2x+3=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{-2} \quad x_1=-1,\ x_2=3$$

$$\rightarrow \boxed{(-1,0),(3,0)}$$

תשובה סופית סעיף ג'

סעיף ד'

שלב א' – נמצא את $f'(x)$

$$f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\left(-x^2+2x+3\right)'}^{-2x+2}\left(x^2\right)-\left(-x^2+2x+3\right)\overbrace{\left(x^2\right)'}^{2x}}{\left(x^2\right)^2}=\frac{(-2x+2)\left(x^2\right)-\left(-x^2+2x+3\right)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-2x^3+2x^2+2x^3-4x^2-6x}{x^4}=\frac{-2x^2-6x}{x^4}=\boxed{\frac{(-2x-6)x}{x^4}=0}\quad /\cdot x^4$$

$$(-2x-6)x=0$$

$$-2x-6=0 \qquad \cancel{x=0}$$

$$2x=-6$$

$$\boxed{x=-3}$$

לא בתחום ההגדרה

שלב ב' - טבלה

x	$x=-4$ ↓	$x=-3$	$x=-1$ ↓	$x=0$	$x=1$ ↓
$f'(x)$	$(-)$		$(+)$	╳	$(-)$
$f(x)$	↘	min	↗	╳	↘

המכנה תמיד חיובי (בתחום ההגדרה), לכן נציב רק במכנה:

$$f'(x)=\frac{(-2x-6)x}{\underbrace{x^4}_{+}}$$

$$f'(-4)=(-2\cdot(-4)-6)\cdot(-4)=2\cdot(-4)=\boxed{-8}$$

$$f'(-1)=(-2\cdot(-1)-6)\cdot(-1)=-4\cdot(-1)=\boxed{4}$$

$$f'(1)=(-2-6)\cdot 1=\boxed{-4}$$

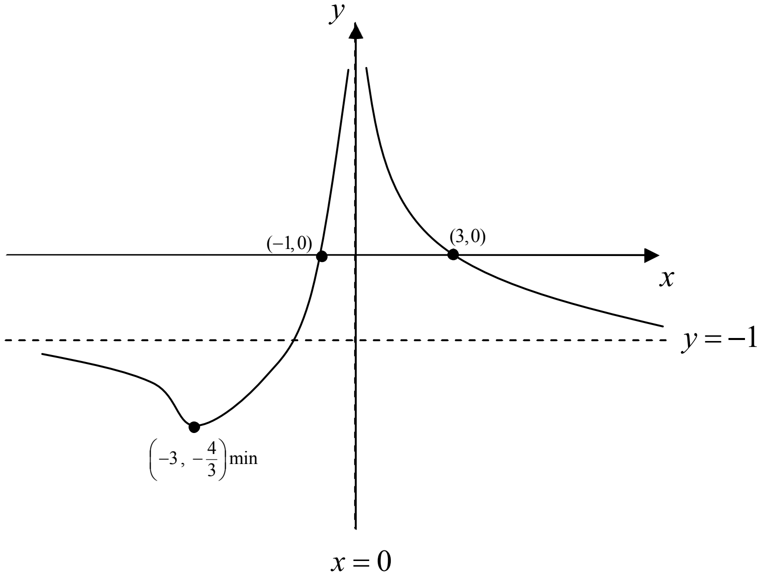
שלב ג' – נציב בפונקציה המקורית:

$$f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^2}$$

$$x=-3:\quad y=\frac{-(-3)^2+2\cdot(-3)+3}{(-3)^2}=\frac{-9-6+3}{9}=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}\ \rightarrow\ \boxed{\left(-3\,,\ -\frac{4}{3}\right)\text{min}}$$

תשובה סופית סעיף ד'

<u>**סעיף ה':**</u>



סעיף ו'

נתון כי העבירו לגרף הפונקציה משיקים המקבילים לציר ה-x, כלומר משיקים ששיפועם 0, כלומר משיקים בנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הם הנקודות שבהם הנגזרת $g'(x)$ מתאפסת.

נתון כי $g'(x)=f(x)$.

נראה כי הפונקציה $f(x)$ מתאפסת בנקודות ששיעור ה-x שלהן הוא $x=3$ ו- $x=-1$, כלומר אלו נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

תשובה סופית סעיף ו'