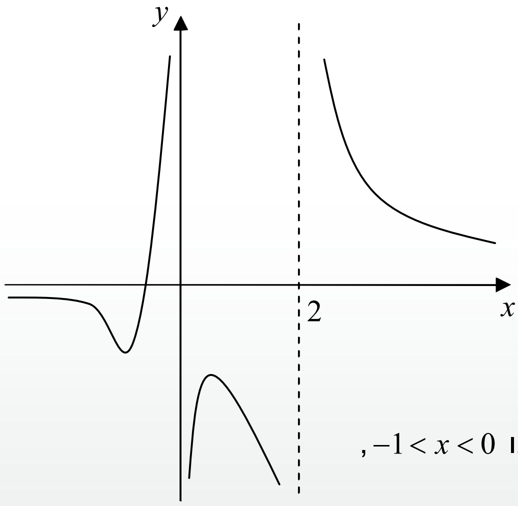
שאלה 7 מתוך קיץ 2015 מועד ב' (בגרות במתמטיקה 4 יחידות)



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{4x+1}{ax^2-2x}$.

a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a.

הצב a=1 וענה על הסעיפים ב,ג,ד.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה f(x).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x).

ד. (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת f'(x)?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת f'(x) בתחום 0<x<2.

פתרון: **א.** $a=1$ **ב.** $x\neq 2,0$ **ג.** עלייה: $0<x<0.5$ או $-1<x<0$,
ירידה: $x>2$ או $0.5<x<2$ או $x<-1$
ד1. $x=2, x=0, y=0$

פתרון מלא:

סעיף א'

על פי הסקיצה ניתן לראות כי x=2 ו- x=0 הם אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה, ולכן:

מציאת אסימפטוטה אנכית:

מכנה $=0 \quad\rightarrow\quad ax^2-2x=0 \quad\rightarrow\quad x(ax-2)=0$

$x=0$ $\qquad$ $ax-2=0$

$ax=2$ ← x=2 אסימפטוטה אנכית, נציב

$2a=2$

$\boxed{a=1}$

תשובה סופית סעיף א'

לטובת המשך התרגיל, נציב a=1 בפונקציה:

$$\boxed{f(x)=\frac{4x+1}{x^2-2x}}$$

חל איסור חוקי להעתיק, לשכפל, לשדר ו/או לקלוט קבצים אלו בכל אמצעי אלקטרוני
ללא אישור בכתב מאתר melumad.co.il

סעיף ב'

מציאת תחום הגדרה:

$$\text{מכנה} \neq 0 \quad \rightarrow \quad x^2-2x\neq 0 \quad \rightarrow \quad x(x-2)\neq 0$$

$$\boxed{x\neq 0} \qquad x-2\neq 0$$

$$\boxed{x\neq 2}$$

תשובה סופית סעיף ב'

סעיף ג'

מציאת תחומי עלייה וירידה

שלב א' – נמצא את $f'(x)$

$$f(x)=\frac{4x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{\overbrace{(4x+1)'}^{4}(x^2-2x)-(4x+1)\overbrace{(x^2-2x)'}^{2x-2}}{(x^2-2x)^2}=\frac{4(x^2-2x)-(4x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{4x^2-8x-(8x^2-8x+2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{4x^2-8x-8x^2+8x-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\boxed{\frac{-4x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}=0} \quad /\cdot(x^2-2x)^2$$

$$-4x^2-2x+2=0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{-8} \quad \boxed{x_1=-1} \quad \boxed{x_2=0.5}$$

חל איסור חוקי להעתיק, לשכפל, לשדר ו/או לקלוט קבצים אלו בכל אמצעי אלקטרוני
ללא אישור בכתב מאתר melumad.co.il

שלב ב' - טבלה

	$x=-2$		$x=-0.5$		$x=0.25$		$x=1$		$x=3$
	↓		↓		↓		↓		↓
x		$x=-1$		$x=0$		$x=0.5$		$x=2$	
$f'(x)$	$(-)$		$(+)$	✕	$(+)$		$(-)$	✕	$(-)$
$f(x)$	↘	min	↗	✕	↗	MAX	↘	✕	↘

$$f'(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{\underbrace{\left(x^2-2x\right)^2}_{+}}$$

$f'(-2)=-4(-2)^2-2\cdot(-2)+2=-10<0$ $\qquad$ $f'(-0.5)=-4\cdot(-0.5)^2-2\cdot(-0.5)+2=2>0$

$f'(0.25)=-4\cdot(0.25)^2-2\cdot(0.25)+2=1.25>0$ $\qquad$ $f'(1)=-4\cdot1^2-2+2=-4<0$

$f'(3)=-4\cdot3^2-2\cdot3+2=-40<0$

כלומר: תחומי עלייה – $0<x<0.5$ או $-1<x<0$
תחומי ירידה - $x>2$ או $0.5<x<2$ או $x<-1$

תשובה סופית סעיף א'(2)

סעיף ד'(1)

מציאת אסימפטוטות המאונכות לצירים:

$$f'(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{\left(x^2-2x\right)^2}=\frac{-4x^2-2x+2}{x^4-4x^3+4x^2}$$

מציאת אסימפטוטה אנכית:

מכנה $=0 \;\rightarrow\; \left(x^2-2x\right)^2=0 \;\rightarrow\; \boxed{x=0\,,x=2}$

(נוודא כי x=2,0 לא מאפס את המונה)

מציאת אסימפטוטה אופקית:

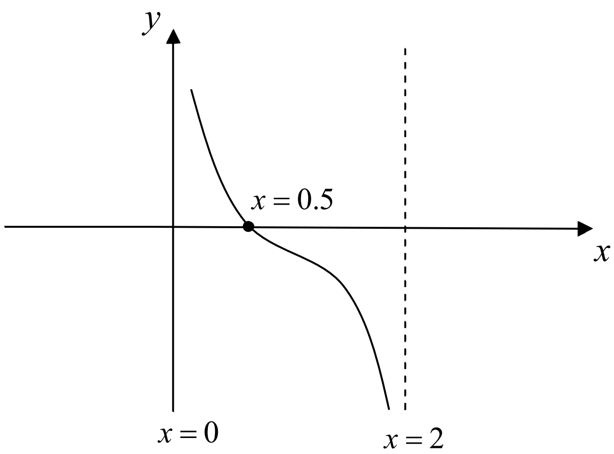
$f'(x)=\dfrac{-4x^{\boxed{2}}-2x+2}{x^{\boxed{4}}-4x^3+4x^2}$ $\rightarrow$ החזקה הגבוהה במכנה $\rightarrow$ $\boxed{y=0}$

תשובה סופית סעיף ד'(1)

חל איסור חוקי להעתיק, לשכפל, לשדר ו/או לקלוט קבצים אלו בכל אמצעי אלקטרוני
ללא אישור בכתב מאתר melumad.co.il

סעיף ד'(2)

על פי הטבלה שבנינו, נשים לב כי:
הנגזרת חיובית בתחום 0<x<0.5
הנגזרת שלילית בתחום 0.5<x<2
והנגזרת מתאפסת בנקודה x=0.5 ולכן:



תשובה סופית סעיף ד'(2)

חל איסור חוקי להעתיק, לשכפל, לשדר ו/או לקלוט קבצים אלו בכל אמצעי אלקטרוני
ללא אישור בכתב מאתר melumad.co.il