

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: תשע"ד, מועד ב
מספר השאלון: 314,035804

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	–	אלגברה, גאומטריה אנליטית,	–	הסתברות	–	20 × 2	–	40	נקודות
פרק שני	–	גאומטריה וטריגונומטריה	–	במישור	–	20 × 1	–	20	נקודות
פרק שלישי	–	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	–	סה"כ	–	20 × 2	–	40	נקודות
								100	נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

- רוכב אופניים יצא מיישוב A, ורכב במהירות קבועה ליישוב B.
 הרוכב הגיע ליישוב B, וחזר מיד ליישוב A.
 המרחק בין יישוב A ליישוב B הוא 30 ק"מ.
 מהירות הרוכב בדרכו חזרה ליישוב A הייתה קטנה ב-3 קמ"ש מהמהירות שלו בדרכו ליישוב B.
 זמן הרכיבה בחזרה ליישוב A היה ארוך ב-50 דקות מזמן הרכיבה ליישוב B.
 א. מצא את המהירות של רוכב האופניים בדרכו ליישוב B.
 ב. מצא באיזה מרחק מיישוב B היה הרוכב כעבור $3\frac{1}{2}$ שעות מרגע היציאה מיישוב A.

תשובה לשאלה 1

נסמן: v – מהירות הרוכב בקמ"ש בדרכו מ־A עד B

זמן (שעות)	דרך (ק"מ)	מהירות (קמ"ש)	
$\frac{30}{v}$	30	v	בדרך מ־A עד B
$\frac{30}{v} + \frac{50}{60}$	30	$v - 3$	בדרך מ־B עד A

א. הדרך מ־B עד A מקיימת: $30 = (v - 3) \cdot \left(\frac{30}{v} + \frac{5}{6}\right)$

⇓

$$v^2 - 3v - 108 = 0$$

⇓

$$v = 12 \text{ קמ"ש}$$

$v > 0$, לכן:

$$\frac{30}{v} = \frac{30}{12} = 2.5 \text{ שעות}$$

ב. זמן הרכיבה מ־A עד B הוא:

⇓

$$3.5 - 2.5 = 1 \text{ שעה}$$

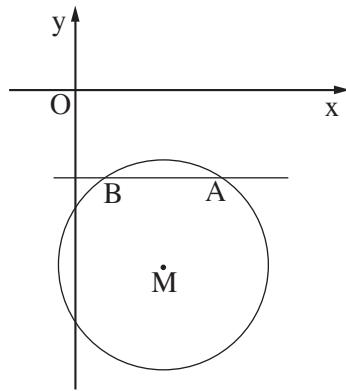
זמן הרכיבה מ־B לכיוון A:

לכן המרחק שעבר הרוכב

$$1 \times (v - 3) = 1 \times (12 - 3) = 9 \text{ ק"מ}$$

אחרי יציאתו מ־B:

שאלה 2



- הישר $y = -3$ חותך מעגל בנקודות A ו-B (ראה ציור).
 הנקודה A נמצאת גם על הישר $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.
 א. מצא את השיעורים של הנקודה A.
 ב. נתון כי מרכז המעגל הוא $M(3, -6)$. מצא את משוואת המעגל.
 ג. מצא את שטח המרובע OAMB (O – ראשית הצירים).

תשובה לשאלה 2

א. הישר $y = -3$ מקביל לציר ה-x,

לכן שיעור ה-y של A הוא:

$$y_A = -3$$

נציב $y = -3$ במשוואת הישר, ונקבל:

$$-3 = -\frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}$$

⇓

$$x_A = 5$$

$$A(5, -3)$$

השיעורים של A הם:

$$M(3, -6)$$

ב. לפי הנתון שיעורי המרכז הם:

$$R^2 = MA^2 = (5 - 3)^2 + (-3 + 6)^2 = 13$$

מכאן ריבוע הרדיוס הוא:

$$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 13$$

לכן, משוואת המעגל היא:

המשך תשובה לשאלה 2.

ג. המרובע OABM מורכב משני משולשים:

$\triangle OAB$ ו- $\triangle ABM$,

לכן שטח המרובע הוא:

$$S_{OABM} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle ABM}$$

$$0 - (-3) = 3$$

הגובה מ- O ל- AB הוא:

$$-3 - (-6) = 3$$

הגובה מ- M(3, -6) ל- AB הוא:

לכן, למשולשים OAB ו- ABM

בסיס משותף AB ואותו גובה לבסיס זה, לכן:

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle ABM}$$

B על הישר $y = -3$, לכן $y_B = -3$.

נציב $y = -3$ במשוואת המעגל

ונמצא את שיעור ה- x של B:

$$(x_B - 3)^2 + (-3 + 6)^2 = 13$$

↓

$$x_B = 1$$

$x_B \neq 5$ כי $B \neq A$, לכן:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5 - 1) = 6$$

מכאן:

$$S_{AOBM} = 2 \cdot S_{\triangle OAB} = 2 \cdot 6 = 12$$

/המשך בעמוד 5/

שאלה 3

בעיר גדולה ערכה מחלקת החינוך סקר שהשתתפו בו כל המורים המלמדים במוסדות החינוך בעיר. המורים נשאלו באיזו שעה הם מעדיפים להתחיל את יום הלימודים: בשעה 8:00 או בשעה 9:00.

$\frac{1}{5}$ מן המשתתפים בסקר הן נשים שמעדיפות להתחיל את הלימודים בשעה 8:00.

$\frac{1}{4}$ מן הנשים שהשתתפו בסקר מעדיפות להתחיל את הלימודים בשעה 8:00.

$\frac{1}{2}$ מן הגברים שהשתתפו בסקר מעדיפים להתחיל את הלימודים בשעה 8:00.

א. מבין המשתתפים בסקר בוחרים באקראי מורה (גבר / אישה).

מהי ההסתברות שהוא מעדיף להתחיל את הלימודים בשעה 8:00?

ב. מבין המשתתפים בסקר בוחרים באקראי מורה (גבר / אישה) שמעדיף להתחיל

את הלימודים בשעה 9:00.

מהי ההסתברות שנבחרה אישה?

ג. מבין המשתתפים בסקר בוחרים באקראי 5 מורים (גברים / נשים).

מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם מעדיף להתחיל את הלימודים בשעה 9:00?

תשובה לשאלה 3

נסמן: A – קבוצת הנשים

B – קבוצת המעדיפים להתחיל ב- 8:00

א. לפי הנתון: $P(B/A) = \frac{1}{4}$ $P(B \cap A) = \frac{1}{5}$

↓

$$P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B/A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

↓

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{5}$$

לפי הנתון $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2}$, לכן: $P(B \cap \bar{A}) = P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

↓

$$P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

ההסתברות לבחור מורה

המעדיף להתחיל ב- 8:00 היא:

המשך תשובה לשאלה 3.

ב. ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(A/\bar{B})$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{7}$$

מכאן:

ג. מצאנו כי ההסתברות לבחור מורה

המעדיף להתחיל ב- 9:00 היא:

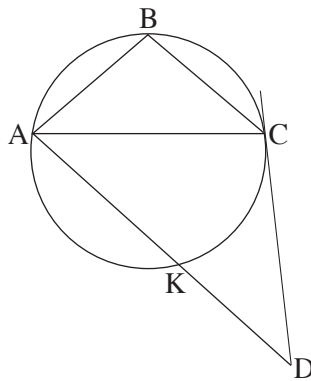
$$P(\bar{B}) = \frac{7}{10}$$

$$P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 = 0.02835$$

לכן ההסתברות המבוקשת היא:

/המשך בעמוד 7/

שאלה 4



משולש שווה-שוקיים (קהה-זווית) ABC ($AB = BC$)
 חסום במעגל.

הישר CD משיק למעגל בנקודה C .
 נתון כי $AD \parallel BC$ (ראה ציור).

א. הוכח כי משולש ACD הוא משולש שווה-שוקיים.

AD חותך את המעגל בנקודה K .
 הוכח:

ב. $\angle CKD = \angle ABC$

ג. $\triangle ABC \cong \triangle CKD$

תשובה לשאלה 4

א. $\angle ABC = \angle ACD$ זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצדו השני

נסמן $\angle ABC = \alpha$, ונקבל: $\angle BCA = \angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ הוא משולש שווה-שוקיים

לפי הנתון: $AD \parallel BC$

זוויות מתחלפות בין מקבילים הן שוות $\angle BCA = \angle CAD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

במשולש ADC מתקיים: $\angle ADC = 180^\circ - (\angle ACD + \angle CAD)$

$$\angle ADC = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle ADC = \angle CAD$$

במשולש מול זוויות שוות יש צלעות שוות $AC = DC$

המשך תשובה לשאלה 4.

ב. המרובע AKCB חסום במעגל, לכן:

סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל
הוא 180°
 $\sphericalangle AKC = 180^\circ - \alpha$

⇓

סכום זוויות צמודות הוא 180°
 $\sphericalangle CKD = 180^\circ - \sphericalangle AKC$

⇓

$\sphericalangle CKD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$

⇓

$\sphericalangle CKD = \sphericalangle ABC = \alpha$

ג.

זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצדו השני
 $\sphericalangle KCD = \sphericalangle CAK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle KDC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

מצאנו בסעיף א:

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = \sphericalangle KCD = \sphericalangle KDC$

מכאן:

$AC = DC$

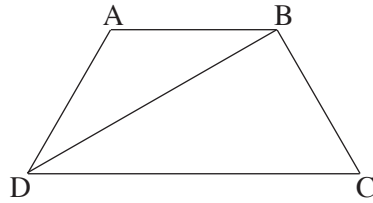
מצאנו גם:

על פי ז.ז.ז. $\triangle ABC \cong \triangle CKD$

מכאן:

/המשך בעמוד 9/

שאלה 5



ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים

$$(AB < DC, AB \parallel DC)$$

(ראה ציור).

נתון: $AD = AB = BC = m$

$$\angle ABD = \alpha$$

א. נתון כי שטח המשולש DAB הוא $\frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$.

מצא את α .

ב. נתון כי שטח הטרפז ABCD הוא $27\sqrt{3}$.

מצא את m .

תשובה לשאלה 5

א. במשולש שווה-שוקיים ABD מתקיים: $\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$

↓

$$S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2} m^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) \quad ; \text{לכן, } AD = AB = m$$

↓

$$\frac{m^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} m^2 \sin(2\alpha)$$

↓

$$\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

↓

$$\alpha = 30^\circ, \alpha = 60^\circ \quad ; \text{פתרונות המשוואה עבור } 180^\circ > \alpha > 0^\circ \text{ הן:}$$

↓

$$\alpha = 30^\circ$$

$\angle DAB$ היא זווית קהה כי $AB < DC$,

והיא $180^\circ - 2\alpha$, לכן:

המשך תשובה לשאלה 5.

ב.

$$S_{\text{טרפז}} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DBC}$$

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD$$

↓

$$\sphericalangle DBC = (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = 90^\circ \quad \text{ומצאנו } \alpha = 30^\circ, \text{ לכן: } \sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$$

↓

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot BC$$

$$\frac{\frac{1}{2}DB}{AD} = \cos \sphericalangle ABD = \cos 30^\circ \quad \text{במשולש שווה-שוקיים ABD מתקיים:}$$

↓

$$DB = 2 \cdot m \cdot \cos 30^\circ = m\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot m\sqrt{3} \cdot m = \frac{m^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{מכאן:}$$

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} + \frac{m^2\sqrt{3}}{2} = \frac{m^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

↓

$$27\sqrt{3} = \frac{m^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

↓

$$m = 6$$

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.
- (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (4) מצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < 5$, ומצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x > 5$.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 4$. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המשיק עם האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.

תשובה לשאלה 6

א. (1) צריך להתקיים: $x - 5 \neq 0$
 \Downarrow
 $x \neq 5$ תחום ההגדרה של $f(x)$

- (2) עבור ערכי x רחוקים מאוד מהראשית (שליליים או חיוביים), הערך של $f(x)$ מתקרב ל-1, לכן האסימפטוטה של $f(x)$ המקבילה לציר ה- x היא: $y = 1$
 עבור ערכי x המתקרבים ל-5, $f(x)$ מקבלת ערכים מאוד שליליים (גדולים מאוד בערכם המוחלט), לכן האסימפטוטה של $f(x)$ המקבילה לציר ה- y היא: $x = 5$

(3) $f(x) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-5)^2} \Rightarrow x - 5 = \pm 1$

\Downarrow
 $x = 6, x = 4$

נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x הן: $(6, 0), (4, 0)$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- y היא: $(0, \frac{24}{25})$

המשך תשובה לשאלה 6.

א. (4) $f(x) = 1 - (x - 5)^{-2}$

\Downarrow
 $f'(x) = -(-2) \cdot (x - 5)^{-3} = \frac{2}{(x - 5)^3}$

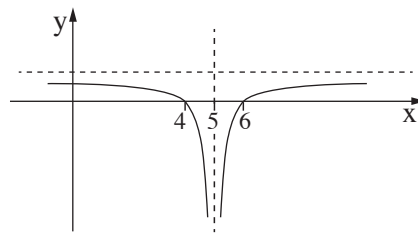
\Downarrow
 עבור $x < 5$ מקבלים כי $(x - 5) < 0$, לכן: $f'(x) < 0$ עבור $x < 5$

עבור $x > 5$ מקבלים כי $(x - 5) > 0$, לכן: $f'(x) > 0$ עבור $x > 5$

x	$x < 5$	5	$x > 5$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

ב. על פי תת-סעיף א (4) מקבלים:

לפי נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים, לפי האסימפטוטות ולפי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ הגרף הוא:



ג. שיעורי נקודת ההשקה: $(4, 0)$

שיפוע המשיק: $f'(4) = \frac{2}{(4-5)^3} = -2$

משוואת המשיק: $y - 0 = -2(x - 4)$

\Downarrow

$y = -2x + 8$

נציב $x = 5$ במשוואת המשיק ונקבל: $y = -2 \cdot 5 + 8 = -2$

לכן נקודת החיתוך עם האסימפטוטה $x = 5$ היא: $(5, -2)$

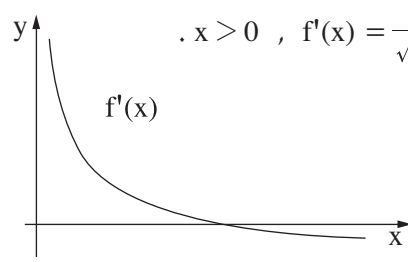
נציב $y = 1$ במשוואת המשיק ונקבל: $1 = -2x + 8$

\Downarrow

$x = 3.5$

לכן נקודת החיתוך עם האסימפטוטה $y = 1$ היא: $(3.5, 1)$

שאלה 7



בציור שלפניך מוצג גרף של פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 1$, $x > 0$.

- א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה־ x .
- ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה. נמק.
- ג. ידוע כי שיעור ה־ y של נקודת הקיצון הפנימית של $f(x)$ הוא 0. מצא את $f(x)$.
- ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = 4$, על ידי הישר $x = 25$ ועל ידי ציר ה־ x .

תשובה לשאלה 7

א. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 4$
 \Downarrow
 $x = 16$

ב. מצאנו $f'(16) = 0$ ולפי הגרף של $f'(x)$ נקבל:

x	$0 < x < 16$	16	$x > 16$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow		\searrow

\Downarrow

ל־ $f(x)$ מקסימום ב־ $x = 16$

המשך תשובה לשאלה 7.

ג. $f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$, לכן: $f(x) = \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = 2 \cdot 4\sqrt{x} - x + C$

שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$ הם: $(16, 0)$

נציב את הנקודה $(16, 0)$ במשוואת $f(x)$, ונקבל: $2 \cdot 4\sqrt{16} - 16 + C = 0$

↓

$C = -16$

מכאן הפונקציה היא: $f(x) = 8\sqrt{x} - x - 16$

ד. השטח המבוקש מורכב משני שטחים:

אחד מעל ציר ה- x והאחר מתחת לציר ה- x ,

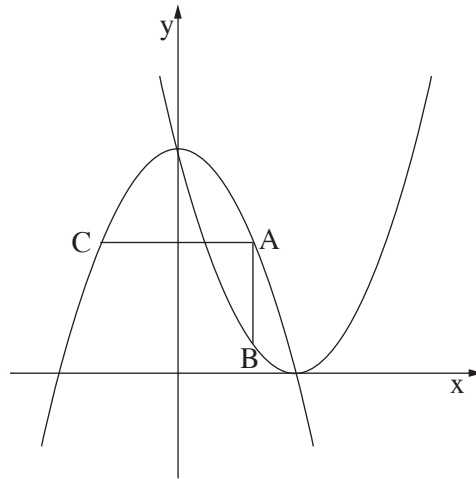
לכן השטח המבוקש הוא:

$$S = \int_4^{16} f'(x) dx - \int_{16}^{25} f'(x) dx = [f(16) - f(4)] - [f(25) - f(16)]$$

↓

$S = (0 + 4) - (-1 - 0) = 5$

שאלה 8



בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות
 $f(x) = -x^2 + 9$ ו- $g(x) = (x-3)^2$.

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על
 גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר אחד, המקביל לציר ה- y

וחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B,

וישר אחר, המקביל לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C

(ראה ציור).

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A, B, ו- C.

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

תשובה לשאלה 8

א. על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון,

לכן שיעורי A הם:

$$A(t, -t^2 + 9)$$

AC מקביל לציר ה- x , לכן:

$$y_A = y_C$$

והפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- y , לכן:

$$x_A = -x_C$$

מכאן שיעורי הנקודה C הם:

$$C(-t, -t^2 + 9)$$

B על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון

כך ש- AB מקביל לציר ה- x , לכן:

$$x_A = x_B = t$$

נציב $x_B = t$ בפונקציה $g(x)$ ונקבל:

$$y_B = (t - 3)^2$$

לכן שיעורי הנקודה B הם:

$$B(t, (t - 3)^2)$$

המשך תשובה לשאלה 8.

ב. שטח המשולש ABC שבו $AC \perp AB$ הוא: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB$

↓

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(x_A - x_C) \cdot (y_A - y_B)$$

↓

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(t - (-t)) \cdot (-t^2 + 9 - (t - 3)^2)$$

↓

$$S_{\triangle ABC} = -2t^3 + 6t^2 = S(t)$$

↓

$$S'(t) = -6t^2 + 12t$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 6t(2 - t) = 0$$

↓

$t = 2$ A ברביע הראשון, לכן $t \neq 0$, ולכן:

בדיקת מקסימום: $S''(t) = -12t + 12$

↓

$$S''(2) = -12 \cdot 2 + 12 < 0$$

↓

מקסימום ב- $t = 2$